Oppgave 1 (V2015 del2, 9 poeng)

Funksjonen *f* er gitt ved

1. Bruk graftegner til å tegne grafen til *f*, bestemme nullpunktene til *f* og eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til *f*.



Vi tegner grafen til , og bruker kommandoen nullpunkt[polynom] for å finne nullpunktene: (-1.37, 0), (3, 0) og (4.37, 0)

Vi finner topp og bunnpunkt med kommandoen ekstremalpunkt[polynom].

Toppunktet er (0.27, 18.39) og bunnpunktet er (3.73, -2.39)

1. Bruk CAS til å bestemme eksakte verdier for nullpunktene til *f* og for eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til *f*.



Eksakt ekstremalpunkt:

Minimum:

Maksimum:

Grafen til *f* har to tangenter med stigningstall lik 3.

1. Bestem likningene for de to tangentene.

Vi finner koordinatene til punktene på grafen til der tangenten har stigningstall 3:



Vi tegner tangentene med kommandoen tangent[punkt,funksjon]:



Tangentene har likningene:
og

1. Tegn de to tangentene i samme koordinatsystem som grafen til *f*.

Gjort i c).

Oppgave 2 (V2015 del2, 5 poeng)

Silje driver butikk. I slutten av mars opprettet hun en side på Facebook.

I slutten av april fant Silje ut at antall personer som hadde klikket «liker» på siden hennes x dager etter 31. mars, tilnærmet var gitt ved funksjonen

Her svarer *x*  0 til 31. mars, x = 1 til 1. april, x = 2 til 2. april, og så videre.

Anta at denne funksjonen også vil gjelde for mai.

1. Hvor mange personer hadde klikket «liker» på Siljes side før 1. april? Hvor mange prosent øker antall «liker» med per dag?

Før 1 april tilsvarer her per 31 mars, altså når .

80 personer har klikket «like» før 1 april.

Antall «liker» øker med 4,5% hver dag.

1. Vil antall «liker» passere 1000 innen utgangen av mai?

31 mai tilsvarer



Vi har på forhånd skrevet inn funksjonsuttrykket for i inntastingsfeltet.

Bildet viser at antall «liker» har passert 1000 innen utgangen av mai.

1. Bestem *f* (16) og *f* (16).

Hva forteller disse verdiene om antall «liker» på Siljes side?



Linje 2 viser at antall personer som liker siden den 16 april er 161. Linje 3 viser at antall personer som liker siden øker med 7 den 16 april.

# *Oppgave 3* *(H2014 del2, 4 poeng)*

Funksjonene *f* og *g* er gitt ved

1. Illustrer grafisk at likningen *f* (*x*)  *g*(*x*) kan ha ingen løsning, én løsning eller to løsninger, avhengig av verdien av *a*.



Her har likningen 2 løsninger, ettersom det er 2 skjæringspunkter mellom grafene i til (i lilla) og (i sort), når a=1,3



a=0, og likningen har en løsning.



a=3, og likningen har ingen løsning (ingen skjæringspunkter mellom grafene)

1. Bestem ved regning verdiene av *a* slik at likningen *f* (*x*)  *g*(*x*) har
* Ingen løsning
* én løsning
* to løsninger



Her er det viktig å slette glideren «a» før man bruker denne metoden. Hvis ikke vil CAS bruke tallverdien til glideren istedenfor symbolet «a».

Linje 3 viser at det kan være to løsninger.

Hvis vil ikke gi noe reelt tall, og det vil derfor ikke være noe løsning.

Hvis , vil begge løsningen bli: og . Altså vil det være en løsning.

Hvis vil uttrykkene i linje 3 gi to ulike løsninger.

MERK: som vi så på grafene i a), vil også gi en løsning til likningen, men det kommer ikke frem av løsningene i linje 3 (disse er udefinerte hvis )

Det er fordi likningen blir:

Hvis blir denne likningen:

Som har løsningen

Oppgave 4 (H2014 del2, 2 poeng)



Det er en tilnærmet lineær sammenheng mellom størrelsene *x* og *y*. Se tabellen ovenfor. Bruk regresjon til å bestemme denne sammenhengen.



Vi lager en liste med punkter i regnearket til geogebra og bruker kommandoen regLin[Liste1].

Den lineære sammenhengen mellom og er

Oppgave 5 (H2014 del2, 6 poeng)

Grete observerer en bakteriekultur. Funksjonen *B* gitt ved

viser antall bakterier *B*(*x*) i bakteriekulturen *x* timer etter at hun startet observasjonene.

1. Tegn grafen til Bfor .



1. Bestem toppunktet på grafen og skjæringspunktene mellom grafen og aksene.

Skjæringspunktet mellom grafen til og y aksen er gitt ved konstantleddet til : (0,200 000). Det punktet forteller at det er 200 000 bakterier i starten av eksperimentet.

Skjæringspunktet med aksen (nullpunktet til ):

Vi bruker kommandoen nullpunkt[polynom] og finner punktet C:



Det forteller at det er 0 bakterier igjen i kulturen etter 56,7 timer.

Toppunktet til :

Vi bruker kommandoen ekstremalpunkt[polynom] og finner punktet D:



Det punktet forteller at det maksimale antall bakterier er nådd etter omtrent 31 timer. Da er det 297870 bakterier i kulturen.

1. Hva forteller svarene i oppgave b) om bakteriekulturen?

Allerede besvart i b)

1. Bestem den momentane vekstfarten til bakteriekulturen etter 40 timer.

CAS:



Dette forteller at antall bakterier minker med 5700 i løpet av den 40 timen.

Oppgave 6 (V2014 del2, 4 poeng)



Tabellen ovenfor viser hvor langt Janne jogget noen uker etter at hun begynte å trene. Den første uka jogget hun 3,4 km, den tredje uka jogget hun 5,1 km, og så videre.

1. Bestem den lineære funksjonen som passer best med tallene i tabellen ovenfor.



Lager liste med punkt og bruker kommandoen regLin. Vi finner funksjonen .

1. Hvor langt vil Janne jogge i uke 25 ifølge funksjonen i oppgave a)?


Vi lager funksjonen a(x)=0,8x+2,47 i CAS og regner ut a(25)

Ifølge denne modellen vil hun jogge 22,5 km i uke 25.

1. I hvilken uke jogget Janne for første gang mer enn 10 km ifølge funksjonen i oppgave a)?

CAS:



Ifølge denne funksjonen jogget Janne mer enn 10 km etter 10 uker.

Oppgave 7 (V2014 del2, 9 poeng)

Funksjonen *f* gitt ved

viser hvor mange kilogram en idrettsutøver veide x uker etter 1. januar 2013.

1. Tegn grafen til *f*.



1. Hvor mye veide idrettsutøveren 1. januar 2013, og hvor mye veide han ett år (52 uker) senere?


1 januar 2013 veide utøveren 72 kg, som linje 2 viser.

Et år etterpå veide utøveren 79,1 kg.

1. Omtrent hvor mange uker i løpet av 2013 veide han mer enn 70 kg?

Vi tegner linja i koordinatsystemet og finner skjæringspunktene mellom linja og grafen til . Til dette bruker vi knappen «skjæring mellom to objekt».

Punktene B og C viser at han veide mer enn 70 kg mellom uke 30 og uke 47. Altså i omtrent 17 uker.



1. Når veide idrettsutøveren mest, og når veide han minst?

Hvor mye gikk han i gjennomsnitt ned i vekt per uke i den perioden han gikk ned i vekt?



Med kommandoen ekstremalpunkt[polynom] får vi punktene A og B. Utøveren veide mest i uke 11 (en gang i mars) og minst i uke 39 (september).

Stigningstallet til linja mellom topp og bunnpunktet er -0,68. Det forteller at han gikk i gjennomsnitt ned 0,68 kg per uke i perioden han gikk ned i vekt.

1. Bestem *f* (3) og *f* (25)

Hva forteller disse to svarene om vekten til idrettsutøveren?

CAS:



Linje 1 forteller at utøveren gikk opp 1,6 kg i løpet av uke 3. Linje 2 forteller at han gikk ned 1 kg i løpet av uke 25.

Oppgave 8 (H2013 del2, 8 poeng)

***h*  3  *y***

***S***

***R*  3**

***y***

***r***

En kjegle er innskrevet i en kule. Kulen har sentrum i *S* og radius *R*  3 . Grunnflaten i kjeglen har radius *r*. Høyden i kjeglen er *h*  3  *y*, der *y* er avstanden fra *S* til grunnflaten i kjeglen. Se skissen ovenfor.

Sett

1. Hvor høy er kjeglen?

CAS:



Vi forkaster den negative løsningen, og finner :

Volumet til en kjegle er gitt ved

1. Bestem volumet av kjeglen ved regning

CAS:



En tilnærmet verdi av volumet er 21,9 (ingen benevning)

Sett nå *r*  x.

1. Vis at volumet av kjeglen da er gitt ved



Vi forkaster den negative løsningen, blir da:

Da gir formelen for volumet av en kjegle funksjonen .

1. Hvor stor må radius og høyde i den innskrevne kjeglen være for at volumet av kjeglen skal bli størst mulig? Hvor stort blir volumet?



Vi tegner grafen til og bruker kommandoen ekstremalpunkt[funksjon,start,slutt] for å finne punkt A.

Volumet er størst når radien er 2,83, da er volumet 33,51. Høyden er da:



Høyden er 4.

MERK: skal man ha eksakte verdier må man bruke CAS hele veien:



Radien for maks volum er , volumet er da og høyden er 4.

Oppgave 9 (H2013 del2, 4 poeng)

I en dam er det 20 000 L vann. Vannmengden minker med 8 % hvert døgn.

1. Hvor mye vann vil det være igjen i dammen etter ett døgn?

Hvor mye vann vil det være igjen i dammen etter ti døgn?

Vi kan lage funksjonen , der er vannmengden i L etter antall døgn.



Linje 2: etter 1 døgn er det 18400 L igjen.

Linje 3: etter 10 døgn er 8688 L igjen.

1. Hvor mange døgn vil det gå før det er 5000 L vann igjen i dammen?



Løsningen til likningen ovenfor viser at det vil bli 5000 L igjen i løpet av døgn 16.

Oppgave 10 (H2013 del2, 8 poeng)



Funksjonen *f* gitt ved

viser hvor mange tonn fisk *f* (*x*) det var i en fiskebestand *x* år etter år 2000.

1. Tegn grafen til *f* for *x* 0, 10.



1. Bestem grafisk når fiskebestanden var minst. Hvor mange tonn fisk var det i fiskebestanden da?



Vi finner bunnpunktet med kommandoen ekstremalpunkt[polynom].

I 2008 var bestanden minst, da var den 51,2 tonn.

1. Finn svarene i oppgave b) ved regning.

Man kan få problemer med CAS:



Her får man bare førstekoordinatet til toppunktet. I så fall må vi gjøre det på en annen måte:



1. Regn ut *f* (5). Bestem den momentane vekstfarten når *x*  5. Hva forteller disse to svarene om fiskebestanden?



Linje 5 forteller at det var 285 tonn fisk i 2005. Linje 6 forteller at bestanden minket med 93 tonn i løpet av 2005.

Oppgave 11 (V2013 del2, 8 poeng)



Funksjonen *h* gitt ved

var en god modell for hjortebestanden i en kommune i perioden 1990–2000. Ifølge modellen var det *h*(*t*) hjort i kommunen *t* år etter 1. januar 1990.

1. Tegn grafen til h for .



1. Når var hjortebestanden størst, og hvor mange hjort var det i kommunen da?



Vi bruker kommandoen ekstremalpunkt[polynom]. Punktet A forteller at det var størst bestand i 1992. Da var det 866 hjort.

1. Løs ulikheten *h*(*t*)  850 grafisk, og forklar hva løsningen forteller om hjortebestanden.



Vi tegner linja y=850, og finner skjæringspunktene mellom linja og grafen til . Punktene C og D viser at hjortebestanden var større enn 850 mellom 1991 og 1992/1993.

1. Bestem *h*(4). Hva forteller svaret om hjortebestanden?

Svaret forteller at hjortebestandene minket med 74 dyr i løpet av 1994.