Oppgave 1 (V2019 del2, 7 poeng)

Punktene $P (2, 4, -3)$ og $Q(0, 0, 1)$ ligger på en kuleflate *K* slik at *PQ* er en diameter til kuleflaten.

1. Vis at kuleflaten *K* er gitt ved likningen

$$\left(x-1\right)^{2}+\left(y-2\right)^{2}+\left(z+1\right)^{2}=9$$

Planet $α$ er gitt ved

$$α: x-y+z=7 $$

1. Bestem eksakt den minste avstanden mellom kuleflaten *K* og planet $α$.

Et plan $α$ er gitt ved likningen

$$β: 2x+y+t⋅\left(z-3\right)=-1$$

1. Vis at avstanden mellom sentrum i kuleflaten *K* og planet $β$ er gitt ved

$$d\left(t\right)=\frac{\left|5-4t\right|}{\sqrt{5}+t^{2}}$$

1. Bestem eksakte verdier for *t* slik at planet $β$ tangerer kuleflaten *K*.

Oppgave 2 (V2019 del1, 8 poeng)

Vi har gitt punktene $A(3, 1, 0)$ , $B(3, 2, 4) $og $C (-1, 1, 4) $.

1. Vis at punktene ligger i planet **gitt ved

$$α: x-4y+z+1=0$$

En linje $l $står normalt på $α$ og går gjennom $A$.

1. Bestem en parameterframstilling for $l$.

En kuleflate tangerer $α$ i $A$.

1. Forklar at kuleflaten er gitt ved likningen

$\left(x-3-t\right)^{2}+\left(y-1+4t\right)^{2}+\left(z-t\right)^{2}=18t^{2}$, for en$ t\in R$.

Punktet *P* (4, 1, 1) ligger på kuleflaten.

1. Bestem sentrum til kuleflaten.

Oppgave 3 (V2018 del2, 6 poeng)

En kuleflate er gitt ved

$$x^{2}-6x+y^{2}+4y+z^{2}-8z-20=0$$

a) Vis at sentrum i kulen er $S(3,-2, 4)$. Bestem radien til kuleflaten.

Et plan er gitt ved

$$6x-3y+2z-4=0$$

b) Bestem avstanden fra kulens sentrum *S* til planet.

Skjæringen mellom kuleflaten og planet er en sirkel.

c) Bestem arealet av sirkelen.

Oppgave 4 (V2018 del2, 6 poeng)

Gitt punktene $A\left(0,0,0\right) , B\left(1, t+2, 3t\right) , C(0,4, t+1)$ og $D\left(t-3, 8, 1\right),$ der $0\leq t\leq 10$.

1. Bestem arealet av trekanten *ABC* for $t=2$.
2. Bruk CAS til å bestemme *t* slik at arealet til trekanten *ABC* blir lik 6.
3. Bestem *t* slik at volumet av pyramiden *ABCD* blir størst mulig.

Oppgave 5 (H2018 del2, 7 poeng)

Sentrum i en kuleflate $K\_{1}$ med radius 2 beveger seg langs en rett linje. Ved tidspunktet *t* vil sentrum i $K\_{1}$ ha koordinatene $\left(2t, 1, 3\right).$

1. Bestem en likning for $K\_{1}$ uttrykt ved t.
2. Ved hvilke tidspunkt vil $K\_{1}$ tangere yz-planet?

En annen kuleflate $K\_{2}$ med radius *r* er gitt ved likningen

$$K\_{2}: x^{2}+y^{2}+z^{2}=r^{2}$$

1. Ved hvilke tidspunkt vil de to kuleflatene $K\_{1}$ og $K\_{2}$ tangere hverandre dersom $r=2$?
2. Bestem eksakt den minste verdien til *r* som gjør at de to kulene tangerer hverandre.

Oppgave 6 (H2018 del1, 7 poeng)

Gitt punktene $A(-1,1,1) $,$ B(1,-1,0$) og $C(-1,0,2)$

1. Bestem $\vec{AB}$ og $\vec{AC}$.
2. Vis at A, B og C ligger i planet gitt ved

$$3x+2y+2z-1= 0$$

Gitt punktet $D(s^{2}-1, 3s+1, 10)$ , der $s$ er et reelt tall.

1. Bestem volumet av tetraederet $ABCD$ uttrykt ved s.
2. Bestem det minste volumet tetraederet kan ha.

Oppgave 7 (V2017 del2, 4 poeng)

Vi har gitt punktene $A(3, 2, t)$, $B(4, -3, 3)$ og $C(8, 3, 5)$ der $t\in R$.

1. Bruk CAS til å vise at arealet av $ΔABC$kan uttrykkes som

$f\left(t\right)=\sqrt{13\left(t^{2}-8t+30\right)}$

1. Bestem det minste arealet som $ΔABC$kan ha.

Oppgave 8 (V2017 del1, 6 poeng)

En kule har sentrum i $S(1, 3, 5) $. Punktet $P(4, -1, 5) $ligger på kuleflaten.

1. Bestem en likning for kuleflaten.

Et plan ** tangerer kuleflaten i punktet *P*.

1. Vis at $3x -4y =16$ er en likning for planet **.

En annen kule har sentrum i $Q(2, 0, 7) . $Planet ** tangerer også denne kuleflaten.

1. Bestem likningen til den nye kuleflaten.

Oppgave 9 (V2015 del2, 6 poeng)

Ei linje $l$ går gjennom punktene $A\left(7, 12, 12\right)$ og $B(1, -6, -12)$.

1. Bestem ei parameterframstilling for linja $l$.

Ei kuleflate K har sentrum i origo og radius 5.

1. Bestem skjæringspunkta mellom linja $l$ og kuleflata K.

Et plan $α$ er gitt ved:

$$α :4x-3y+7=0 $$

Det er to plan som er parallelle med $α,$ og som samtidig tangerer kuleflate K.

1. Bestem likningen for hvert av disse planene.

Oppgave 10 (H2017 del2, 8 poeng)

Funksjonen *f* er gitt ved

$$f\left(x\right)=\sqrt{2^{2}-x^{2}} , x\in \left[-2, 2\right]$$

1. Bruk graftegner til å tegne grafen til *f.*

Tegn også inn linjen gitt ved g(x) = f(x) i samme koordinatsystem i grafen til f.

1. Bruk CAS til å bestemme arealet av sirkelsegmentet avgrenset av grafene til *f* og *g*.

Vi dreier dette sirkelsegmentet 360 om *x*-aksen.

1. Bruk CAS til å bestemme volumet av omdreiningslegemet vi da får.

Funksjonen *F* er gitt ved

$$F\left(x\right)\sqrt{r^{2}-x^{2}} , x\in \left[-r, r\right] , r >1 $$

Linja gitt av $G(x)=F(1)$ skjer til F i punktene $\left(-1, F\left(-1\right)\right)$ og $\left(1, F\left(1\right)\right).$

Området mellom grafene til *F* og *G* er et sirkelsegment. Vi roterer dette sirkelsegmentet 360  om *x*-aksen.

1. Vis ved hjelp av CAS at volumet av omdreiningslegemet vi da får, er uavhengig av *r*.

Oppgave 11 (H2017 del1, 8 poeng)

Gitt punktene $A\left(1, 0, 3\right)$ , $B\left(3, 2, -1\right)$ og $C\left(0, 4, 4\right)$.

1. Bestem $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ og $\vec{AB} ×\vec{AC}$.
2. Vis at punktene A, B og C ligger i planet $α$ gitt ved likningen

$$9x+y+5z=24$$

En linje $l$ står normalt på planet α og går gjennom punktet $T(11, 7, 5).$

1. Bestem en parameterframstilling for linjen $l$. Bestem skjæringspunktet mellom linjen $l$ og planet α.
2. Bestem volumet av pyramiden ABCT.